Strumenti della Teoria dei Giochi per l'Informatica **A.A. 2009/10**

Lecture 10: 6-7 Maggio 2010

Meccanismi con Pagamenti: Applicazioni e Limiti

Docente *Paolo Penna* Note redatte da: *Paolo Penna*

1 Lezione precedente

$$\text{Funzioni di scelta sociale} \rightarrow \text{Impossibilità di Arrow} \rightarrow \underbrace{\text{Meccanismi con pagamenti} \rightarrow \text{Compatibilità agli incentivi} \rightarrow \text{VCG}}_{\text{OGGI: applicazioni, limiti}}$$

2 Un Esempio Facile

Asta 2ndo Prezzo (Vickrey)

1. Scelgo Migliore Offerta
2. Vincitore Paga 2nda Migliore Offerta

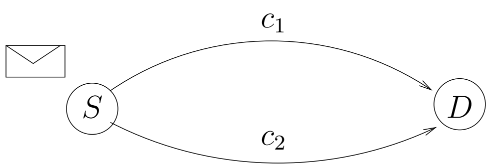
Esempio:

7, 10

$\uparrow$

vince, paga 7

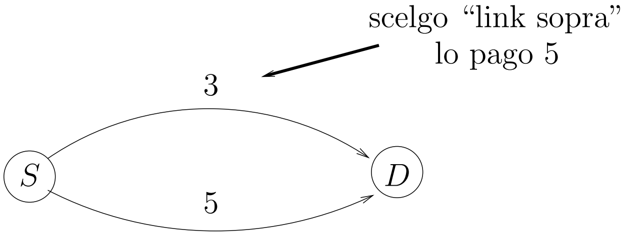
Problema (2 Link, 1 Pacchetto)



c_i = costo di spedizione (latenza)

Voglio scegliere il migliore (costo minimo)

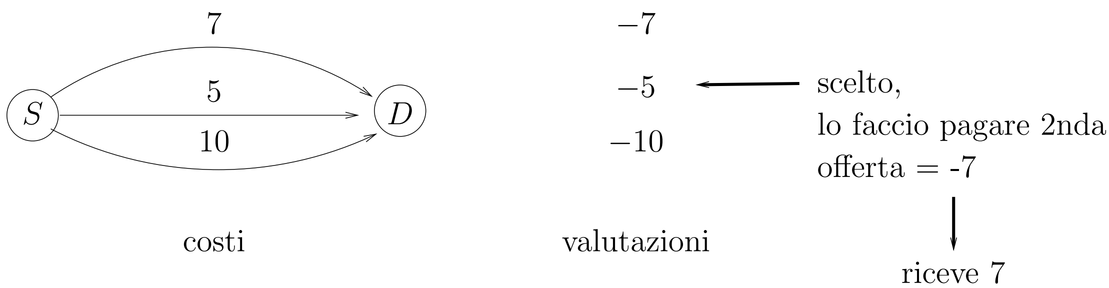
Esempio:



Meccanismo per 2 Link, 1 Pacchetto:
Input: c_1, c_2 (costi due link)

1. Algorithmo: Scegli link costo min
2. Paga il link scelto il 2ndo miglior costo

Perché funziona?
(compatibile agli incentivi)

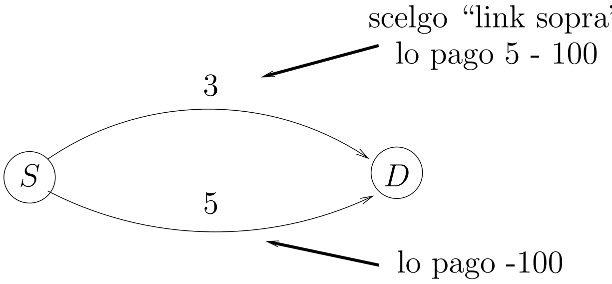


Basta essere Compatibile agli Incentivi?

Modifichiamo i pagamenti così:

$$P_i^{Vickrey} \Longrightarrow P_i^{Vickrey} - 100$$

È ancora compatibile agli incentivi. Ma



nessun giocatore vuole giocare!

Partecipazione Volontaria (informale): Giocare conviene sempre

Partecipazione Volontaria (semi-informale): Giocare "onestamente" (dico il vero) conviene rispetto a non giocare

Definizione (Partecipazione Volontaria): Un meccanismo (A, P) soddisfa la partecipazione volontaria se

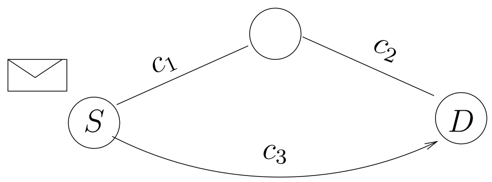
$$\forall i, \forall c_{-i}, \forall c_i^v \qquad u_i(c_i^v, c_{-i}|c_i^v) \geq 0$$

dove

$$u_i(c_i^v, c_{-i}|c_i^v) := P_u(c_i^v, c_{-i}) - c_i^v(A(c_i^v, c_{-i}))$$

Problema (Shortest-Path)

Esempio:

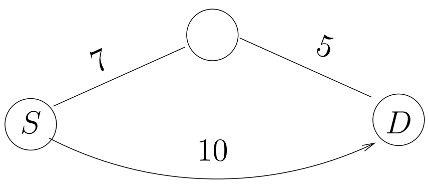


selezionare
cammino minimo

Proviamo ad usare Vickrey

1. seleziono cammino minimo
2. ogni arco selezionato riceve $\underbrace{\text{2ndo miglior costo}}_{??????}$

Devo pagare "il secondo link più corto" o "il secondo cammino più corto"?
Non funziona comunque:

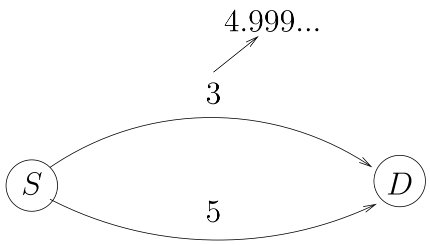


Conviene mentire: $7 \longrightarrow 4$

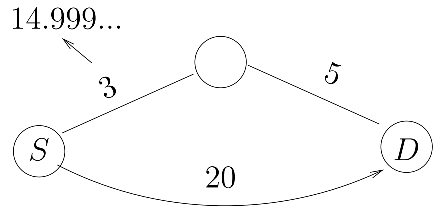
3 L'Idea di Vickrey

Meccanismo Fesso:

1. seleziono cammino min
2. pago arco i selezionato $P_i^{Fesso}(c) = c_i$



massima speculazione
5



massima speculazione
15

MIGLIOR CAMMINO SENZA i	–	LUNGHEZZA CAMMINO MIN MA <u>NON CONTANDO</u> i

"massima speculazione"

Idea di Vickrey: Pago direttamente la massima speculazione del meccanismo fesso

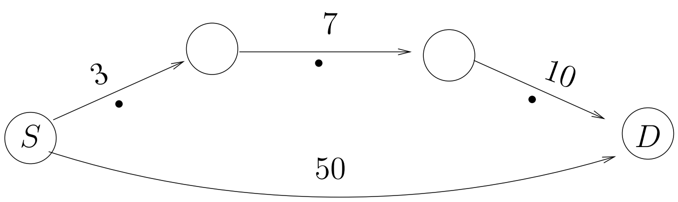
Usiamo queste tre cose:

$SP(c)$ = lunghezza cammino minimo per costi c

$SP_{c_i=0}(c)$ = come sopra, ma <u>non contando i</u>

$SP_{-i}(c_{-i})$ = lunghezza cammino minimo alternativo ad i (tolgo i dal grafo)

Vediamo cosa succede:



Gli agenti sono "1", "2" e "3" per gli archi sopra (da sinistra a destra) e "4" per l'arco sotto.

$$SP(3,7,10,50) = 3+7+10 = 20$$

$$SP_{c_2=0}(3,7,10,50) = 3+0+10 = 13$$

$$SP_{-2}(3,*,10,50) = 50$$

Ecco il pagamento per "2":

$$\begin{aligned} P_2^{SP}(c) &:= SP_{-2}(c_{-2}) - SP_{c_2=0}(c_{-2}) = \\ &= SP_{-2}(c_{-2}) - (c_1 + 0 + c_3) \end{aligned}$$

Perchè funziona?

Abbiamo costruito un meccanismo VCG

Input: Costi $c_1(), \ldots, c_n()$
Algoritmo: Trova la solutione x^* che minimizza la somma dei costi: $c_1(x) + \ldots + c_n(x)$
Pagamenti: Agente i riceve

$$P_i^{VCG}(c) = h_i(c_{-i}) - [c_1(x^*) + \cdots + c_{i-1}(x^*) + 0 + c_{i+1}(x^*) + \cdots c_n(x^*)]$$

dove $h_i()$ non dimende da c_i.

$$x^* = \text{cammino minimo per costi } c_1, \ldots, c_n$$
$$c_i(x) = c_i \text{ se } x \text{ usa/contiene } i,$$
$$c_i(x) = 0 \text{ se } x \text{ non usa/contiene } i$$

Basta dimostrare (Esercizio)

$$SP_{c_i=0} = c_1(x^*) + \cdots + c_{i-1}(x^*) + 0 + c_{i+1}(x^*) + \cdots c_n(x^*)$$

e osservare che

$$P_i^{SP}(c) := SP_{-i}(c_i) - SP_{c_i=0}$$

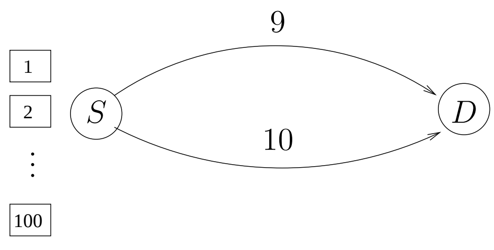
sono di tipo VCG. Tutti i meccanismi VCG sono compatibili agli incentivi (lezione precedente) e quindi:

Teorema: Il problema dello shortest-path ha un meccanismo (A, P^{SP}) compatibile agli incentivi.

Esercizio: Dimostra lo stesso risultato per il problema del Minimum Spanning Tree (MST).

4 Limiti di VCG

Problema (2 Link, 100 Pacchetti)

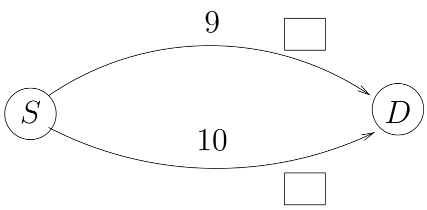


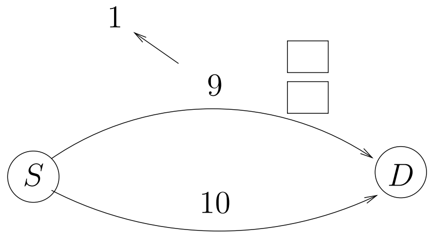
Voglio bilanciare il carico (metà e metà circa)

Proviamo ad usare i pagamenti VCG

$$P_i^{VCG}(c) = h_i(c_{-i}) - \sum_{j \neq i} c_j(A(c))$$

Per ora supponiamo $h_i() = 0$.
Ecco cosa succede:





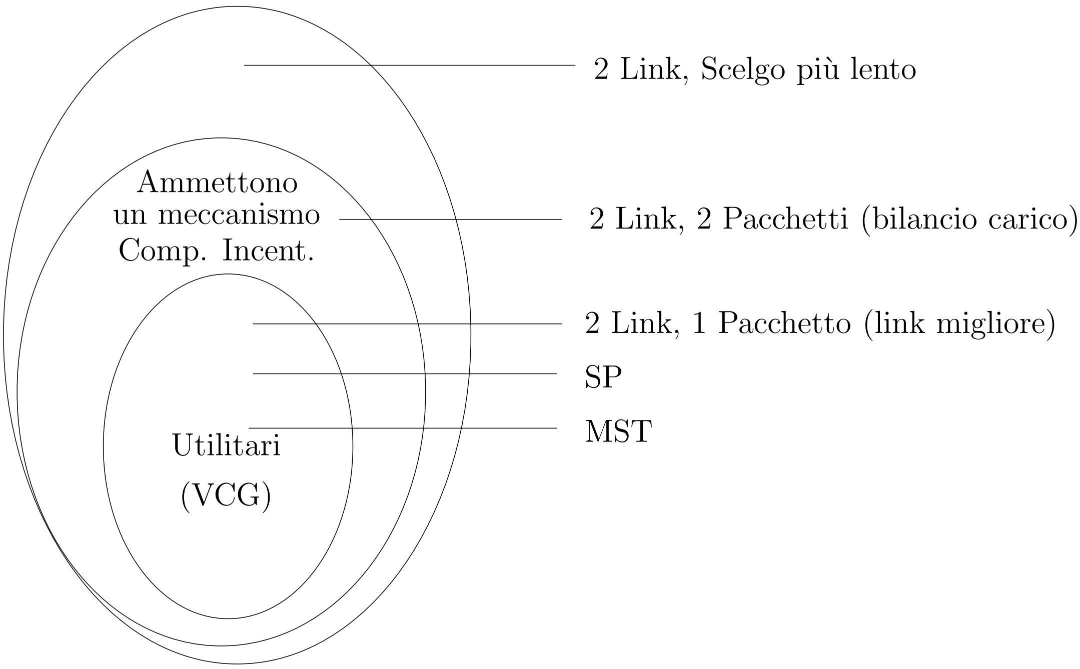
$$P_1^{VCG}(9, 10) = -10 \qquad\qquad P_1^{VCG}(1, 10) = -0$$

$$u_1(9, 10) = -10 - 1 \times 9 = -19 \qquad\qquad u_1(1, 10) = 0 - 2 \times 9 = -18$$

Esercizio: Dimostra che anche scegliendo $h_i()$ diversa da 0, i pagamenti VCG non vanno bene con **questo algoritmo.**

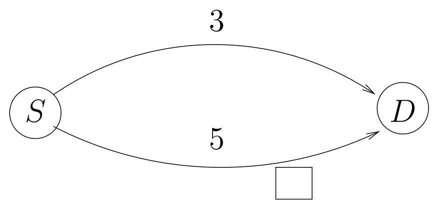
Domanda: Esistono dei pagamenti per l'algoritmo A che bilancia il carico (2 pacchetti)?

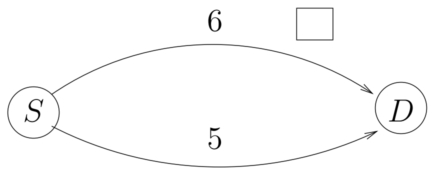
Domanda: Quali algoritmi possono essere usati in un meccanismo (dato A esiste P tale che (A, P) è compatibile agli incentivi)?



5 Un problema "irrisolubile"

Problema (2 Link, Scelgo più lento)





Algoritmo A: sceglie il pù lento ($max(c_1, c_2)$)

Teorema: Nessun pagamento P può dare un meccanismo compatibile agli incentivi con questo algoritmo. Ossia, comunque scelgo P, (A, P) non è compatibile agli incentivi.

Dimostrazione: Per assurdo, supponi che esista P t.c. (A, P) è compatibile agli inceentivi. Analizziamo i due casi sopra, guardando al link "di sopra". Se il suo vero costo fosse "3" allora il meccanismo garantisce che dichiarando "6" il suo utile non migliora. In altre parole:

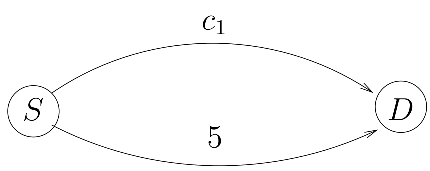
$$P_1(3, 5) - 0 \geq P_1(6, 5) - 3$$

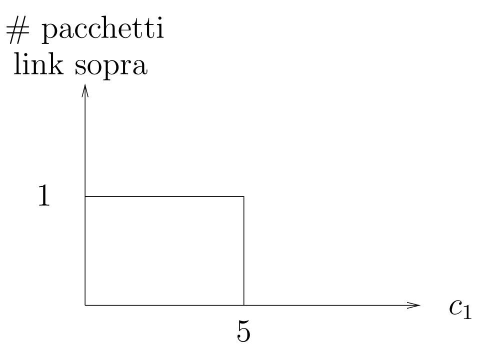
Se il suo vero costo fosse "6" allora il meccanismo garantisce che il suo utile non migliora dichiarando "3"

$$P_1(6, 5) - 6 \geq P_1(3, 5) - 0$$

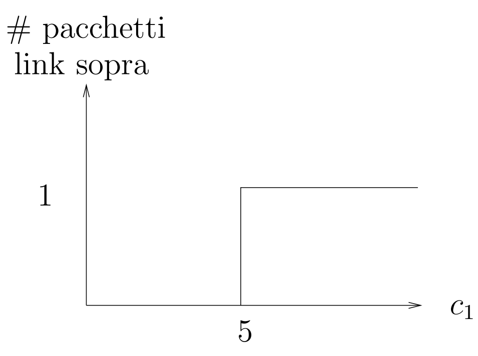
Da queste due disuguaglianze ottengo un assurdo "$-6 \geq -3$" (somma le due disuguaglianze).

Quali sono gli algoritmi BUONI e quelli CATTIVI?



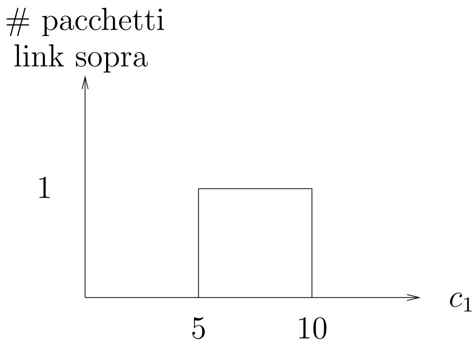


Scelgo il più veloce



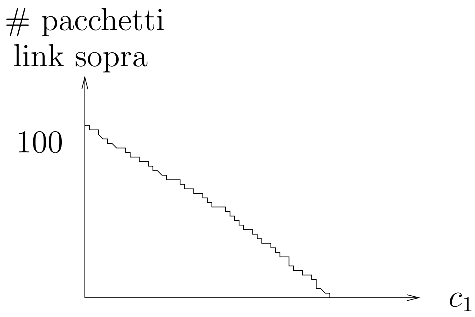
Scelgo il più lento

Esercizio: Dimostra che il seguente algoritmo non può essere trasformato in un meccanismo (non esistono i pagamenti, come nel teorema sopra).



Algoritmo "scalino"

Algoritmo "100 pacchetti" è BUONO o CATTIVO?

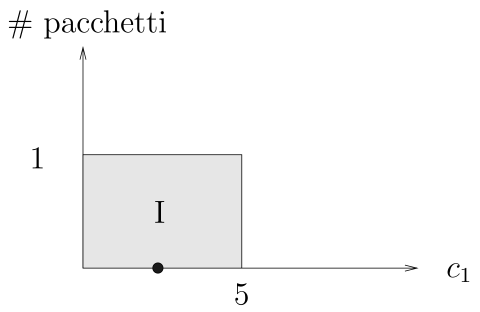


Bilancio il carico

6 Un'alternativa a VCG

Cosa cambia da 1 a 2 pacchetti?

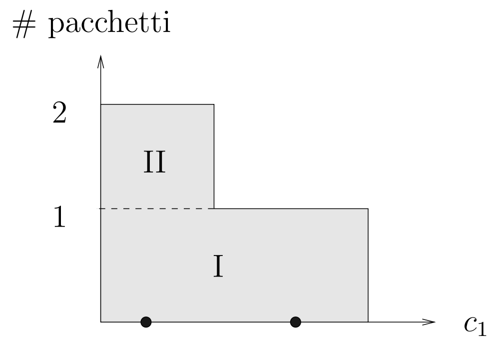
1 PK



1 pk

pago I $= 1 \times 5$

2 PK

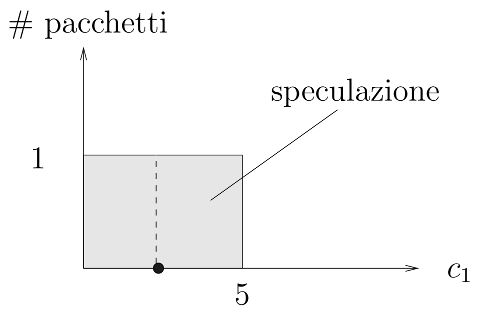


2 pk 1 pk

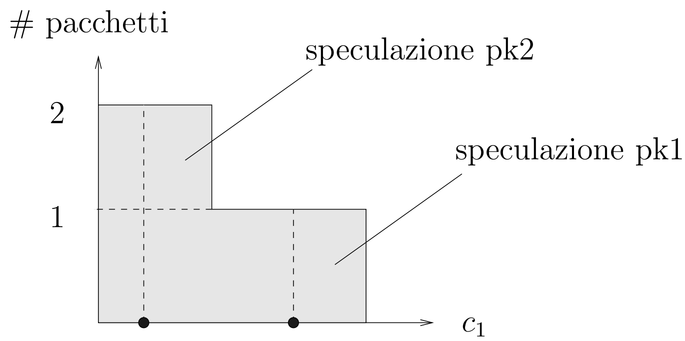
I + II I

Idea: Pago la massima speculazione "pacchetto a pacchetto"

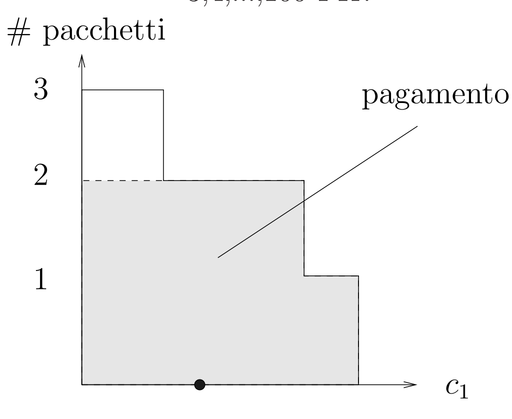
1 PK



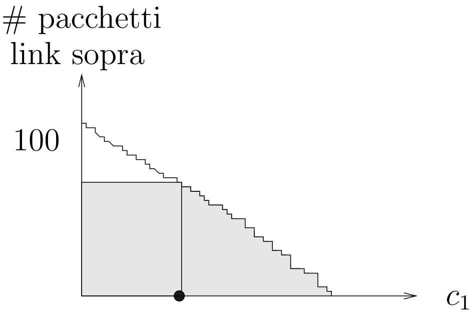
2 PK



3,4,...,100 PK?



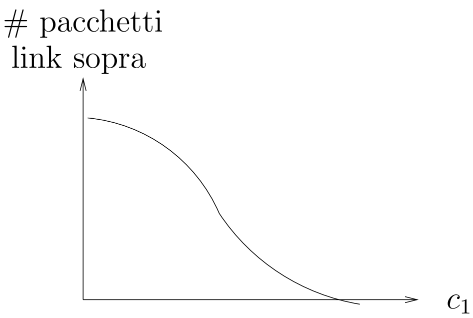
Formula Pagamenti: $P_i(c_i, c_{-i}) = q_i(c_i, c_{-i}) + \int_{c_i}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx$ (1)

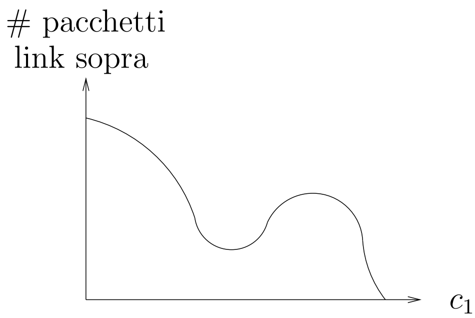


Bilancio il carico

Esercizio: Dimostra che questi pagamenti soddisfano la partecipazione volontaria

Algoritmi BUONI = MONOTONI (carico non aumenta)





Esercizio: Dimostra che se un algoritmo è CATTIVO (il carico di un agente aumenta quando il suo costo aumenta) allora non posso usare questo algoritmo per ottenere un meccanismo compatibile agli incentivi.
Suggerimento: Se l'algoritmo è cattivo, esistono due valori c_i' e c_i'' tali che $c_i' < c_i''$ e $q_i(c_i', c_{-i}) < q_i(c_i'', c_{-i})$. Adatta la dimostrazione vista per il problema "2 Link, Scelgo il più lento".

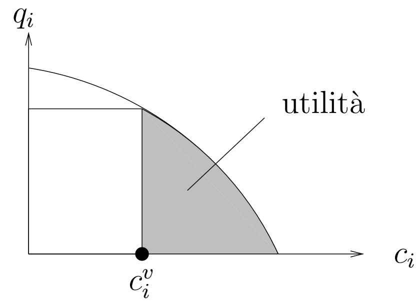
Problemi One-Parameter

Algoritmo A: alloca q_i di carico ad ogni agente i
Costo agenti: c_i per una unità $\Longrightarrow$ costo = $q_i \cdot c_i$

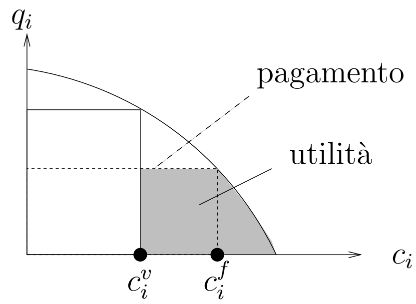
Definizione (Algoritmo Monotono): Un algoritmo A è monotono se il carico di ogni agente non aumenta (quando il suo costo aumenta e gli altri costi rimangono uguali):

$$\forall i, \forall c_{-i} \;\; q_i(x, c_{-i}) \text{ è non crescente in } x$$

Teorema: Ogni algoritmo A monotono ammette un meccanismo (A, P) compatibile agli incentivi che utilizza i pagamenti della formula (1).
Dimostrazione: Confrontiamo l'utilità di i quando dice il vero con l'utilità che dice un valore più grande o uno più piccolo. L'utilità quando dichiaro il vero costo è:



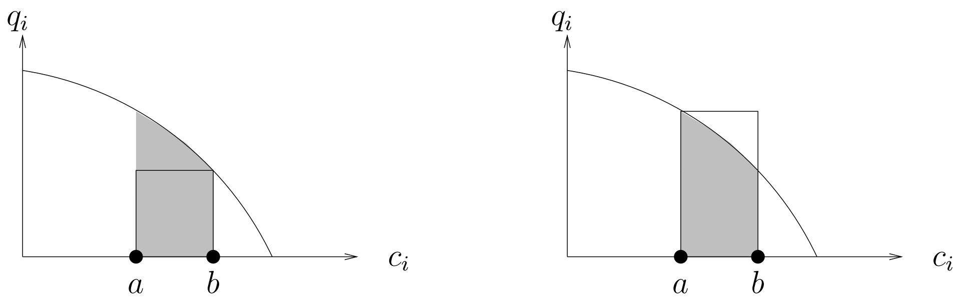
pagamento - costo $= \left[c_i^v \cdot q_i(c_i^v, c_{-i}) + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx\right] - c_i^v \cdot q_i(c_i^v, c_{-i}) = \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})$
Vediamo l'utilità quando dichiaro un costo falso:
(costo falso > costo vero).



pagamento - costo =

$$\left[c_i^f \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) + \int_{c_i^f}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx\right] - c_i^v \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) = (c_i^f - c_i^v) \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})$$

La differenza tra le due utilità è tutta nel pezzo "in mezzo ai due punti". Qui usiamo la monotonia di $q_i()$:

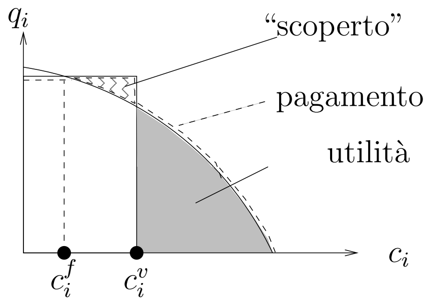


$$(b - a) \cdot q(b) \leq \int_a^b q(x)dx \leq (b - a) \cdot q(a) \tag{2}$$

La parte di sinistra è quella che usiamo ora (dopo useremo quella destra):

$$
\begin{aligned}
utile^v = \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx = & \quad \int_{c_i^v}^{c_i^f} q_i(x, c_{-i})dx & + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx \\
\geq & \quad (c_i^f - c_i^v) \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) & + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx = utile^f
\end{aligned}
$$

(costo falso $<$ costo vero).



A destra di c_i^f ho lo stesso utile del caso "dico il vero", mentre a sinistra di c_i^f ho una parte del costo vero "non coperta" dal pagamento: il costo vero è

$$c_i^v \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) = c_i^f \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) + (c_i^v - c_i^f) \cdot q_i(c_i^f, c_{-i})$$

mentre il pagamento è

$$c_i^f \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) + \int_{c_i^f}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx = c_i^f \cdot q_i(c_i^f, c_{-i}) + \int_{c_i^f}^{c_i^v} q_i(x, c_{-i})dx + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx$$

pagamento - costo =

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_{c_i^f}^{c_i^v} q_i(x, c_{-i})dx - (c_i^v - c_i^f) \cdot q_i(c_i^f, c_{-i})\right] + \int_{c_i^v}^{\infty} q_i(x, c_{-i})dx = \\
&\qquad \left[\int_{c_i^f}^{c_i^v} q_i(x, c_{-i})dx - (c_i^v - c_i^f) \cdot q_i(c_i^f, c_{-i})\right] + utile^v
\end{aligned}
$$

La parte in parentesi sarebbe lo "scoperto": per far vedere che è negativa o zero usiamo la monotonia di $q_i()$ e l'osservazione a pagina 11 (parte destra della disuguaglianza (2)). Quindi l'utile quando dico il falso non è migliore dell'utile quando dico il vero.

> Ogni algoritmo monotono può "dare" un meccanismo compatibile agli incentivi.
> Se un algoritmo non è monotono allora non c'è nessun meccanismo compatibile agli incentivi con quell'algoritmo.