dal libro di Babai & Frankl:

Linear Algebra Methods in Combinatorics

with applications to Geometry and Computer Science

Convessità

Teorema di Helly

Da “locale” a “globale”

Lezione 9

Convessità

$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2$$

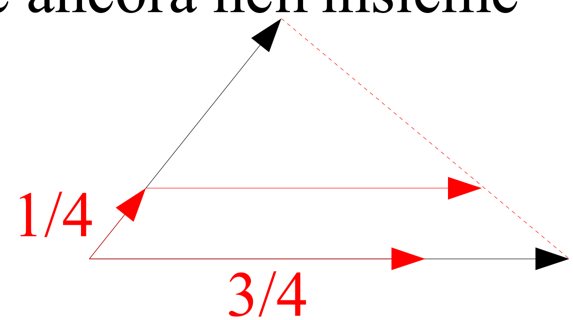
Combinazione Convessa: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1 \end{array}}$$

Insieme Convesso: Ogni combinazione convessa dei suoi elementi è ancora nell'insieme

Combinazione lineare "limitata"

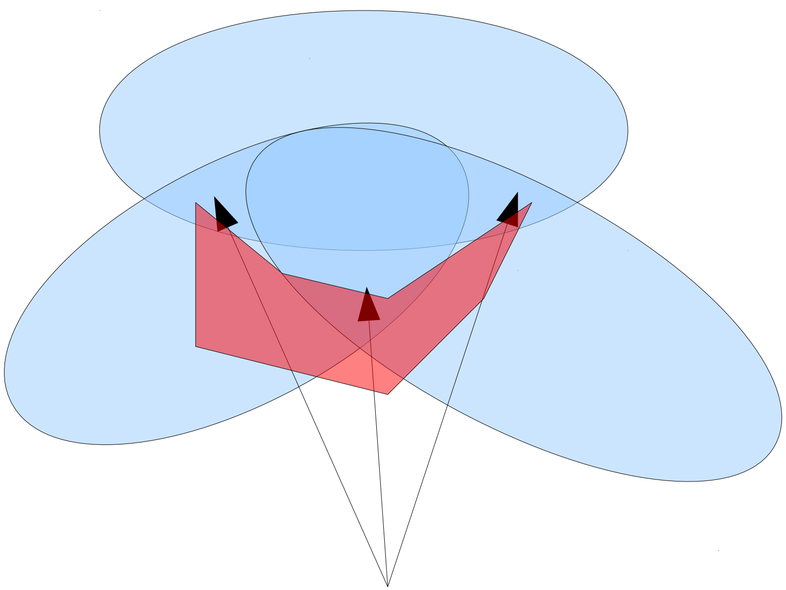
punti = vettori



Helly in 2D

Se C1, C2, C3, C4 sono **convessi** e si **intersecano tre-a-tre** allora la loro intersezione è **non vuota**

Esempio:



Quarto: deve coprire qui evitando la parte “centrale”

Helly in 2D

Se C1, C2, C3, C4 sono **convessi** e si **intersecano tre-a-tre** allora la loro intersezione è **non vuota**

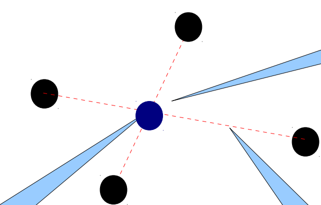
Dimostrazione:

$$C1 \cap C2 \cap C3$$

$$C1 \cap C2 \cap C4$$

$$C1 \cap C3 \cap C4$$

$$C2 \cap C3 \cap C4$$



Helly in 2D

Se C1, C2, C3, C4 sono **convessi** e si **intersecano tre-a-tre** allora la loro intersezione è **non vuota**

Non importa
che sono solo 4

Helly in 2D

Se C1, C2, C3, C4 sono **convessi** e si **intersecano tre-a-tre** allora la loro intersezione è **non vuota**

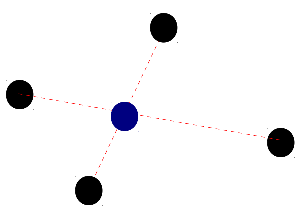
Dimostrazione: Induzione (Esercizio)

In 3D, 4D, etc?

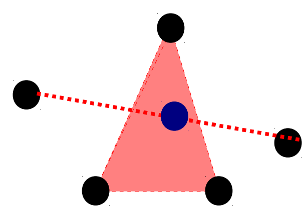
Teorema di Helly

Se C1,...,Cm sono **convessi in** $\mathbf{R}^d$ e si **intersecano “(d+1)-a-(d+1)”** allora la loro intersezione è **non vuota**

Dimostrazione (Idea):



2D

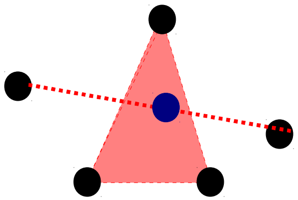


3D

Lemma (Radon'21): Se hai d+2 punti, riesci a farli “intersecare”

Lemma di Radon (1921)

Se ho $d+2$ punti in $\mathbf{R}^d$ allora riesco sempre a **partizionarli** (esiste S1 ed S2) in modo tale che le due **combinazioni convesse si intersecano** (conv(S1)∩conv(S2) non vuoto)



3D

Lemma di Radon (1921)

Se ho $d+2$ punti in $\mathbf{R}^d$ allora riesco sempre a **partizionarli** (esiste S1 ed S2) in modo tale che le due **combinazioni convesse si intersecano** (conv(S1)∩conv(S2) non vuoto)

Dimostrazione:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{d+2} \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda = 0$$

$(d+1)$ x $(d+2)$

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_{d+2} p_{d+2} = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{d+2} = 0$$

$$S1 := \{\lambda_i > 0\} \qquad S2 := \{\lambda_i < 0\}$$

$$\sum_{\lambda_i \in S1} \lambda_i = \sum_{\lambda_j \in S2} (-\lambda_j) =: \sigma$$

Lemma di Radon (1921)

Se ho $d+2$ punti in $\mathbf{R}^d$ allora riesco sempre a **partizionarli** (esiste S1 ed S2) in modo tale che le due **combinazioni convesse si intersecano** (conv(S1)∩conv(S2) non vuoto)

Dimostrazione:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{d+2} \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda = 0$$

$(d+1)$ x $(d+2)$

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_{d+2} p_{d+2} = 0$$

$$\sum_{\lambda_i \in S1} \lambda_i p_i = \sum_{\lambda_j \in S2} (-\lambda_j) p_j$$

$$\sum_{\lambda_i \in S1} \lambda_i = \sum_{\lambda_j \in S2} (-\lambda_j) =: \sigma$$

Lemma di Radon (1921)

Se ho $d+2$ punti in $\mathbf{R}^d$ allora riesco sempre a **partizionarli** (esiste S1 ed S2) in modo tale che le due **combinazioni convesse si intersecano** $\boxed{(\mathrm{conv}(S1)\cap\mathrm{conv}(S2)\text{ non vuoto})}$

Dimostrazione:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{d+2} \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \lambda = 0$$

$(d+1)$ x $(d+2)$

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_{d+2} p_{d+2} = 0$$

$$\boxed{\sum_{\lambda_i \in S1} \frac{\lambda_i}{\sigma} p_i = \sum_{\lambda_j \in S2} \frac{(-\lambda_j)}{\sigma} p_j}$$

$$S1 := \{\lambda_i > 0\} \qquad S2 := \{\lambda_i < 0\}$$

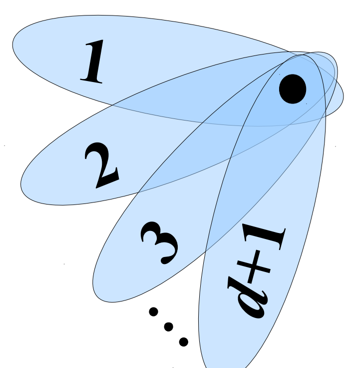
$$\sum_{\lambda_i \in S1} \lambda_i = \sum_{\lambda_j \in S2} (-\lambda_j) =: \sigma$$

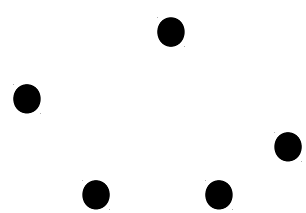
Teorema di Helly

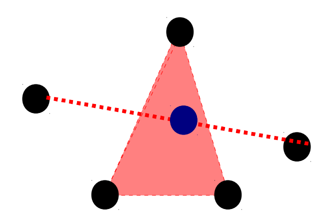
Se C1,...,Cm sono **convessi in $\mathbf{R}^d$** e si **intersecano “(*d*+1)-a-(*d*+1)”** allora la loro intersezione è **non vuota**

Dimostrazione (schema per $m = d + 2$):

d +2 intersezioni → d +2 punti → Intersezione comune (Lemma Radon)







Esercizio: metti insieme i pezzi (*m* qualsiasi)

Esercizio

Dimostra la seguente “versione combinatoriale” del Teorema di Helly:

Se C1,...,Cm hanno cardinalità *d* e si **intersecano “(*d*+1)-a-(*d*+1)”** allora la loro intersezione è **non vuota**

Suggerimenti: inizia con 4 insiemi di cardinalità *d*=3, e adatta la prima parte della dimostrazione del Teorema di Helly

Cosa ricordare

- La “forma” del teorema di helly:
  - condizione locale $\Rightarrow$ condizione globale
- Diversi “livelli” di dipendenza:

  (a) $d+1$ vettori in $\mathbf{R}^d \Rightarrow$ linearmente dipendenti

  (b) $d+2$ vettori in $\mathbf{R}^d \Rightarrow$ “più” che linearmente dipenti

$$\underbrace{\lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_a v_{i_a}}_{\text{comb. convessa}} = \underbrace{\lambda_{a+1} v_{i_{a+1}} + \cdots + \lambda_{d+2} v_{i_{d+2}}}_{\text{comb. convessa}}$$

  (c) w è in conv$(v_1,\ldots,v_k)$ se $w = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_a v_k}_{\text{comb. convessa}}$

dim Lemma Radon